



TITLE:

# Mora-VianaによるHenon type strange attractor についての結果の紹介 II(低次元力学系における分岐の研究)

AUTHOR(S):

平出, 耕一

---

CITATION:

平出, 耕一. Mora-VianaによるHenon type strange attractor についての結果の紹介 II(低次元力学系における分岐の研究). 数理解析研究所講究録 1992, 806: 65-92

ISSUE DATE:

1992-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/82941>

RIGHT:

## Mora-Viana による Hénon type strange attractor についての結果の紹介 II

愛媛大理 平出 耕一 (Koichi Hiraide)

M. Hénon [H] は次の (\*) で定義される 2 次元写像  $h_{a,b} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  の力学系を考察し、数値実験によりパラメーター値  $a = 1.4, b = 0.3$  において複雑な構造を持つと思われる attractor を発見した。

$$(*) \quad h_{a,b}(x, y) = (1 - ax^2 + y, bx)$$

これ以後、上の写像 (Hénon map) の力学系がいろいろな立場から研究されている (三波氏による「Hénon map について」を参照されたい)。しかしながら、Hénon が見つけた attractor の構造は、現在でもまだ理解されていない様である。

最近、M. Benedicks と L. Carleson は、Hénon map に対し 'strange attractor' が、厳密な意味で、存在することを証明した。

### 定理 1 (Benedicks – Carleson[BC])

領域  $\{x > 0, y > 0\} \subset \mathbf{R}^2$  にある双曲型不動点の不安定多様体を  $W^u$  で表わす。任意の  $0 < c < \log 2$  に対し  $b_0 > 0$  が存在して、各  $0 < b < b_0$  に対し Lebesgue 測度が正の集合  $E(b)$  を選ぶことが出来、すべての  $a \in E(b)$  に対し次が成立する：

(i) 或る開集合  $U = U(a, b) \neq \emptyset$  があって、すべての  $z \in U$  に対し

$$\text{dist}(h_{a,b}^n(z), \overline{W^u}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

(ii) 点  $z_1 \in W^u$  が存在して次の (a) と (b) が成り立つ：

$$(a) \quad \overline{\{h_{a,b}^n(z_1) : n \geq 0\}} = \overline{W^u}$$

$$(b) \quad \|Dh_{a,b}^n(z_1)(1, 0)\| \geq e^{cn} \quad (\forall n \geq 0)$$

上の定理の  $\overline{W^u}$  は双曲型にはならない。このことは、双曲型 attractor の性質から得られる ([P])。また、定理の証明からも分かる。

### 定義 1

$M$  は曲面とし  $f : M \rightarrow M$  は微分同相写像とする。 $f$  で不変なコンパクト部分集合  $\Lambda \subset M$  が  $f$  の attractor であるとは、 $\Lambda$  の安定集合

$$W^s(\Lambda) = \{x \in M : \text{dist}(f^n(x), \Lambda) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}$$

の内部は  $\text{int} W^s(\Lambda) \neq \emptyset$  となるときをいう。attractor  $\Lambda$  が strange であるとは、 $\Lambda$  は有限集合でなく、点  $z_1 \in \Lambda$  が存在して次の (a) と (b) が成り立つときとする：

(a)  $\overline{\{f^n(z_1) : n \geq 0\}} = \Lambda$ ,

(b) 接ベクトル  $v \in T_{z_1}M, v \neq 0$  と  $\lambda > 1$  が存在して、 $\|Df^n(v)\| \geq \lambda^n \|v\|$  ( $\forall n \geq 0$ ).

また、 $f^{-1} : M \rightarrow M$  の attractor を  $f$  の repellor と呼び、strange repellor が定義される。

$I$  を区間とし  $F : M \times I \rightarrow M$  を  $C^r$  写像とする。各  $\mu \in I$  に対し  $F(\cdot, \mu) : M \rightarrow M$  が  $C^r$  微分同相写像であるとき、 $F$  を  $C^r$  微分同相写像の one parameter family と呼ぶ。ここで、 $I$  は 0 を内点として含むとしておく。

L.Mora と M.Viana は、Benedicks-Carlson の方法を homoclinic bifurcation の枠組みの中に持込んで、次の定理 2 を証明した。

### 定理 2 (Mora – Viana[MV])

( $f_\mu$ ) を曲面の  $C^r$  微分同相写像の one parameter family とし次の (A1), (A2), (A3) を仮定する。

(A1)  $f_0$  は双曲型周期点  $p_0$  を持ち、微分  $Df_0^n(p_0)$  の固有値  $\lambda_0, \sigma_0$  について、 $|\lambda_0 \sigma_0| \neq 1$  であり、 $\ell + m \leq r - 2$  となる自然数  $\ell, m$  に対し  $\lambda_0^\ell \sigma_0^m \neq 1$  である。ここで、 $n$  は  $p_0$  の周期を表わす。

(A2) 安定多様体  $W^s(p_0)$  と不安定多様体  $W^u(p_0)$  について、Homoclinic tangency の点  $q \in W^s(p_0) \cap W^u(p_0)$  が存在し、 $q$  において  $W^s(p_0)$  と  $W^u(p_0)$  は 2 次の order で接している。

(A3) パラメーター  $\mu$  に関して、 $\frac{\partial f_\mu(q)}{\partial \mu} \big|_{\mu=0}$  は  $W^u(p_0)$  の  $q$  における接線に横断的である。

このとき、 $r$  が十分大ならば (例えば、 $r=140$ )、Lebesgue 測度が正のパラメーター値  $\mu$  の集合  $E$  が  $\mu = 0$  の近くに存在して、すべての  $\mu \in E$  に対し  $f_\mu$  は、 $f_0$  による  $q$  の軌道の近傍に strange attractor あるいは strange repellor を持つ。

定理 2 の strange attractor ( strange repellor) は、定理 1 と同様、双曲型でない。

以下で、定理 2 の Mora-Viana による証明の概略を述べる。

### §1 Renormalization と Hénon-like family

( $f_\mu$ ) を曲面の  $C^r$  微分同相写像の one parameter family とし定理 2 の (A1), (A2), (A3) を仮定する。 $p_0$  は  $f_0$  の双曲的不動点としてよい。陰関数定理より  $\mu$  が 0 に十分近ければ、 $f_\mu$  は双曲型不動点  $p_\mu$  を持ち  $\mu \rightarrow p_\mu$  は  $C^r$  写像となる。 $\lambda_\mu, \sigma_\mu$  を  $Df_\mu(p_\mu)$  の固有値とする。このとき  $\lambda_\mu, \sigma_\mu$  はそれぞれ  $\mu$  の  $C^{r-1}$  関数である。(A1) と Gornov の定理 ([B]) より  $C^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor}$  局所座標  $(U, (\xi, \eta))$  が存在して

$$U \supset \{(\xi, \eta) : |\xi| \leq 2, |\eta| \leq 2\},$$

$$p_\mu = (0, 0),$$

$$f_\mu(\xi, \eta) = (\sigma\xi, \lambda\eta), \quad \sigma = \sigma_\mu, \quad \lambda = \lambda_\mu.$$

(A1) より  $|\sigma_0 \lambda_0| \neq 1$ 。以後、 $|\sigma_0 \lambda_0| < 1, 0 < |\lambda_0| < 1 < |\sigma_0|$  の場合を考える。(A2) の homoclinic tangency の点  $q$  は  $q = (1, 0)$  であるとして一般性を失わない。また、 $f_0^N(q) = r = (0, 1)$  となる  $N > 0$  が存在するとしてよい。このとき (A2), (A3) より

$$f_\mu^N(1 + \xi, \eta) = (\alpha\xi^2 + \beta\eta + v\mu + H_1(\mu, \xi, \eta), 1 + H_2(\mu, \xi, \eta))$$

となる。ここで  $H_1, H_2$  は  $C^{[\frac{r-1}{2}]}$  関数であり

- (1)  $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, v \neq 0, \frac{\partial}{\partial \xi} H_2(0, 0, 0) \neq 0$
- (2)  $H_1 = \partial_\xi H_1 = \partial_{\xi\xi} H_1 = \partial_\eta H_1 = \partial_\mu H_1 = H_2 = 0$  at  $(\mu, \xi, \eta) = (0, 0, 0)$ ,
- (3)  $v = 1, \partial_{\mu\mu} H_1(0, 0, 0) = 0$ .

ただし (3) に対しては parameter  $\mu$  の座標変換を必要とする。上の (1), (2), (3) より

$$\begin{aligned} H_1(\mu, \xi, \eta) &= C_1 \eta^2 + C_2 \mu \xi + C_3 \xi \eta + C_4 \mu \eta + O(3), \\ H_2(\mu, \xi, \eta) &= D_1 \mu + D_2 \xi + D_3 \eta + O(2), \quad D_2 \neq 0. \end{aligned}$$

次で定義される座標変換を  $\phi_n : (\mu, \xi, \eta) \rightarrow (a, x, y)$  で表わす。

$$\begin{cases} a &= -\alpha(\sigma^{2n}\mu - \sigma^n + \beta\lambda^n\sigma^{2n}) \\ x &= -\frac{\alpha}{a}\sigma^n(\xi - 1) \\ y &= -\frac{\alpha}{a}\sigma^{2n}(\sqrt{\lambda\sigma})^{-n}(\eta - \lambda^n) \end{cases} \quad \begin{cases} \mu &= -\frac{a}{\alpha}\sigma^{-2n} + \sigma^{-n} - \beta\lambda^n \\ \xi - 1 &= -\frac{a}{\alpha}\sigma^{-n}x \\ \eta &= -\frac{a}{\alpha}\sigma^{-2n}(\sqrt{\lambda\sigma})^n y + \lambda^n \end{cases}$$

$f(\mu, \xi, \eta) = (\mu, f_\mu(\xi, \eta))$  において

$$\varphi_n(a, x, y) = \phi_n \circ f^n \circ f^N \circ \phi_n^{-1}(a, x, y)$$

とする。このとき、 $R = \{(a, x, y) : 1 \leq a \leq 3, |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$  に対し、 $n > 0$  が十分に大ならば、 $\varphi_n : R \rightarrow \mathbf{R}^3$  となる。 $\psi : R \rightarrow \mathbf{R}^3$  を  $\psi(a, x, y) = (a, 1 - ax^2, 0)$  で定義すると

$$\|\varphi_n - \psi\|_{C^{[\frac{r-1}{2}]}(R)} \leq K(\sqrt{\lambda_0\sigma_0})^n$$

が成り立つ。実際、 $\varphi_n : R \rightarrow \mathbf{R}^3$  は

$$\begin{pmatrix} a \\ x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ 1 - ax^2 - \beta(\sqrt{\lambda\sigma})^n y + \sigma^{2n} H_1(\mu, \xi - 1, \eta) \\ -\frac{\alpha}{a}(\sqrt{\lambda\sigma})^n \sigma^n H_2(\mu, \xi - 1, \eta) \end{pmatrix}$$

で与えられる。 $1 \leq a \leq 3$  に対し、 $\varphi_a : [-2, 2]^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  を  $\varphi(a, x, y) = (a, \varphi_a(x, y))$  によって定義する。one parameter family  $(\varphi_a)_a$  を  $(f_\mu)$  の renormalization と呼ぶ。

### 定理3

$(f_\mu)$  を曲面の  $C^r$  微分同相写像の one parameter family とし定理2の (A1), (A2), (A3) を仮定する。このとき  $K > 0, t > 0$  が存在して任意の  $b > 0$  に対し  $(f_\mu)$  の  $C^{[\frac{r-1}{2}]}$  renormalization  $(\varphi_a)_a$  を次が成り立つ様に選ぶことが出来る：

$$(a) \|\varphi - \psi\|_{C^{[\frac{r-1}{2}]}(R)} \leq K\sqrt{b}, \quad \text{特に} \quad \|\varphi\|_{C^{[\frac{r-1}{2}]}(R)} \leq 5 \leq K,$$

$$(b) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = D\varphi_a(x, y) \quad \text{において}$$

$$(i) \quad |A| \leq K \quad \frac{1}{K}\sqrt{b} \leq |B| \leq K\sqrt{b}$$

$$\frac{1}{K}\sqrt{b} \leq |C| \leq K\sqrt{b} \quad |D| \leq Kb^{1+t}$$

$$(ii) \quad \frac{1}{K}b \leq |\det D\varphi_a| \leq Kb \quad \|D\varphi_a\| \leq K \quad \|D\varphi_a^{-1}\| \leq \frac{K}{b}$$

$$\|D_{(a,x,y)}A\| \leq K \quad \|D_{(a,x,y)}B\| \leq Kb^{\frac{1}{2}+t}$$

$$\|D_{(a,x,y)}C\| \leq Kb^{\frac{1}{2}+t} \quad \|D_{(a,x,y)}D\| \leq Kb^{1+2t}$$

$$(iii) \quad \|D_{(a,x,y)}(\det D\varphi_a)\| \leq Kb^{1+t} \quad \|D^2\varphi_a\| \leq K$$

$$\|D_{(a,x,y)}^2A\| \leq Kb^t \quad \|D_{(a,x,y)}^2B\| \leq Kb^{\frac{1}{2}+2t}$$

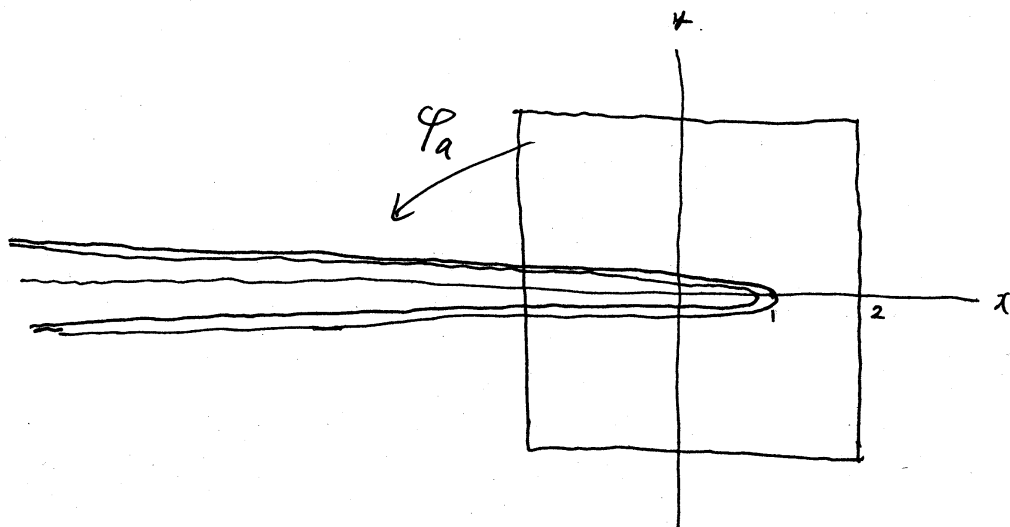
$$\|D_{(a,x,y)}^2C\| \leq Kb^{\frac{1}{2}+2t} \quad \|D_{(a,x,y)}^2D\| \leq Kb^{1+3t}$$

$$\|D_{(a,x,y)}^2(\det D\varphi_a)\| \leq Kb^{1+2t} \quad \|D^3\varphi_a\| \leq Kb^t$$

**定義2**

定理3の性質を持つ one parameter family  $(\varphi_a)_a$  ここで  $\varphi_a : \{|x| \leq 2, |y| \leq 2\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $1 \leq a \leq 3$  を Hénon-like family と呼ぶ。ただし  $b > 0$  は十分に小さいと考える。また Hénon-like family は次の形であるとイメージすることが出来る：

$$\varphi_a(x, y) = (1 - ax^2 \pm \sqrt{b}y, \pm \sqrt{b}x)$$



## 定理 4

$(\varphi_a)$  を  $C^r$  Hénon-like family とする。このとき任意の  $0 < c < \log 2$  に対し  $b_0 > 0$  が存在して、各  $b \in (0, b_0)$  に対し Lebesgue 測度正の集合  $E(b) \subset (1, 2)$  がとれて、すべての  $a \in E(b)$  に対し  $\varphi_a$  で不変なコンパクト集合  $\Lambda = \Lambda_a$  が存在し次が成り立つ。

- (1)  $\text{int} W^s(\Lambda) \neq \emptyset$ ,
- (2) 点  $z_1 \in \Lambda$  が存在して
  - (a)  $\overline{\{\varphi_a^n(z_1) : n \geq 0\}} = \Lambda$ ,
  - (b)  $\|D\varphi_a^n(z_1)(1, 0)\| \geq e^{cn}$ ,  $(\forall n \geq 0)$ .

上の  $\Lambda$  は、定理 1 と同様、ある双曲型不動点の不安定多様体の閉包である。また、定理 4 の  $r$  は次の不等式を満たしていればよい。

$$r \geq \frac{8 \log \sigma_1^{-1}}{c}, \quad \sigma_1 = \frac{1}{10K^2}$$

定理 3 と定理 4 から、定理 2 が得られる。以下、定理 4 について説明する。

§2 Attractor  $\Lambda$  の構成

$\varphi = (\varphi_a)_a$  を Hénon-like family とし、 $\psi_a : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  ( $1 \leq a \leq 3$ ) を  $\psi_a(x, y) = (1 - ax^2, 0)$  で定義する。このとき  $\|\varphi_a - \psi_a\|_{C^r([-2, 2]^2)} \leq K\sqrt{b}$ 。

まず  $\psi_2$  について考える。 $\psi_2$  の不動点は  $P = (\frac{1}{2}, 0)$ ,  $Q = (-1, 0)$  の 2 個で、 $D\psi_2(P)$  の固有値は  $-2, 0$ 、 $D\psi_2(Q)$  の固有値は  $4, 0$  となり、共に双曲型不動点である。陰関数定理より  $\psi_2$  の  $C^r$  近傍  $\mathcal{N} \subset \{C^k \text{写像} : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbf{R}^2\}$  と  $C^\infty$  写像  $P, Q : \mathcal{N} \rightarrow \mathbf{R}^2$  が存在して、各  $\varphi \in \mathcal{N}$  に対し  $P(\varphi), Q(\varphi)$  は  $\varphi$  の双曲型不動点で、 $\text{Fix}(\varphi) = \{P(\varphi), Q(\varphi)\}$  となる。さらに、これらの不動点の局所安定 (不安定) 多様体は、 $C^r$  位相で  $\varphi$  に関して連続的に変化する。

## 命題 2.1

$U$  を  $0 \in \mathbf{R}^n$  の近傍とし、 $g_t : U \rightarrow \mathbf{R}^n$  ( $t \in \mathbf{R}^m$ ) を  $C^r$  写像の  $m$  parameter family とする。また  $0 \in \mathbf{R}^n$  は  $g_0$  の双曲型不動点とし、接空間の splitting を  $\mathbf{R}^n = E^s \oplus E^u$  で表わす。 $C^r$  写像の  $m$  parameter family  $h = (h_t)$  は  $g = (g_t)$  に  $C^r$  (bounded) 位相で十分近いとし、 $t \in \mathbf{R}^m$  は  $0$  の近傍にあるとする。このとき  $0 \in U$  の近くに  $h_t$  の双曲型不動点  $P(h_t)$  がただ一つ存在し、その局所不安定多様体  $W_{loc}^u(P(h_t))$  に関し次が成り立つ： $C^r$  写像  $\phi_h(t, \cdot) : B_\epsilon(0) \subset E^u \rightarrow E^s$  が存在して、 $\phi_h(t, \cdot)$  のグラフが  $W_{loc}^u(P(h_t))$  となり、さらに  $\phi : (h, t, x) \mapsto \phi_h(t, x)$  は  $C^r$  写像となる。特に  $h \mapsto \phi_h(\cdot, \cdot) \in C^{r-1}(V, E^s)$  は  $C^1$  写像である。ここで  $V$  は  $0 \in \mathbf{R}^m \times E^s$  の近傍を表わす。また、局所不安定多様体に関し同様のことが成立する。

$\psi_a(x, y) = (1 - ax^2, 0)$ ,  $1 \leq a \leq 3$  の不動点  $P(\psi_a) = (P(\psi_a), 0)$ ,  $Q(\psi_a) = (Q(\psi_a), 0)$  とその不安定多様体は、次のようになる。

$1 < a < 2$  の場合

$$\frac{1}{2} < P(\psi_a) < 1$$

$$W^u(P(\psi_a)) = [1 - a, a]$$

$$Q(\psi_a) < -1 < 1 - a$$

$$W^u(Q(\psi_a)) = (-\infty, Q(\psi_a)] \cup [Q(\psi_a), 1]$$

$a = 2$  の場合

$$P(\psi_a) = \frac{1}{2}$$

$$W^u(P(\psi_a)) = [-1, 1]$$

$$Q(\psi_a) = -1$$

$$W^u(Q(\psi_a)) = (-\infty, -1] \cup [-1, 1]$$

$2 < a < 3$  の場合

$$0 < P(\psi_a) < \frac{1}{2}$$

$$W^u(P(\psi_a)) = (-\infty, 1]$$

$$1 - a < -1 < Q(\psi_a)$$

$$W^u(Q(\psi_a)) = (-\infty, Q(\psi_a)] \cup (-\infty, 1]$$

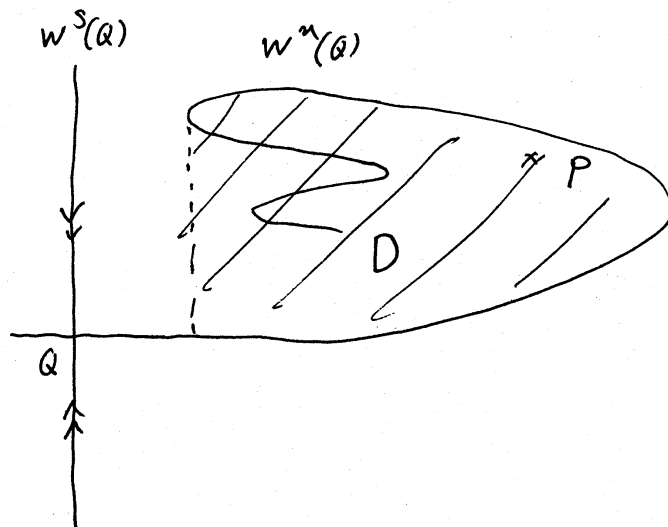
また安定多様体は

$$W^s(P(\psi_a)) = \{P(\psi_a)\} \times \mathbf{R}, \quad W^s(Q(\psi_a)) = \{Q(\psi_a)\} \times \mathbf{R}.$$

従って、 $a = 2$  のとき、 $Q(\psi_a)$  は、 $Q(\psi_a)$  に対する homoclinic tangency の点であり、また  $Q(\psi_a)$  と  $P(\psi_a)$  に対する heteroclinic tangency の点である。 $a > 2$  のとき、これらは横断的になり、 $a < 2$  のときは、消滅する。局所安定 (不安定) 多様体の変化の連続性より、Hénon-like family  $(\varphi_a)_a$  において、 $b > 0$  が十分小さいならば、 $a = 2$  の近くに  $a_+ = a_+(\varphi)$  があって、 $Q(\varphi_{a_+})$  に対し homoclinic tangency の点が存在し、 $a < a_+$  ならばこれらの点は消滅する。同様に、 $a_- = a_-(\varphi)$  があって、 $Q(\varphi_{a_-})$  と  $P(\varphi_{a_-})$  に対し heteroclinic tangency の点が存在し、 $a < a_-$  ならばこれらの点は消滅する。

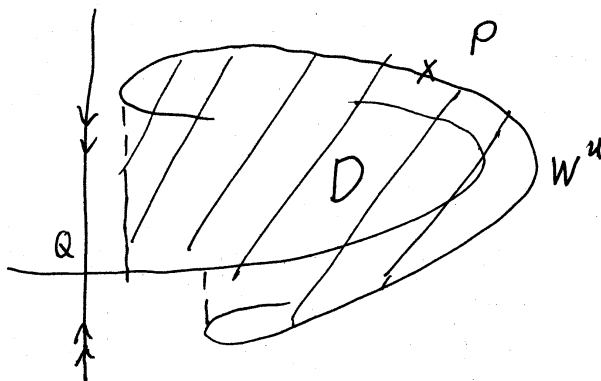
$(\varphi_a)_a$  が orientation preserving の場合：

$a < a_-$  について考える。 $W^u(Q(\varphi_a)) - \{Q(\varphi_a)\}$  の右の separatrix は  $[-1, 1] \times \{0\}$  の近傍に含まれていることが、容易に分かる。図の様に disc  $D$  を取ると、 $\varphi_a$  が orientation preserving であることから、 $\varphi_a(D) \subset D$  となる。Brouwer の不動点定理より、 $\varphi_a$  は  $D$  の中に不動点をもつ。これは  $P(\varphi_a)$  でなければならない。明かに、 $P(\varphi_a) \in \text{int} D$  である。従って、 $W^u(P(\varphi_a)) \subset D$ 。



$(\varphi_a)_a$  が orientation reversing の場合:

$a < a_+$  について考える。このとき、 $W^u(P(\varphi_a))$  は  $[-1, 1] \times \{0\}$  の近傍に含まれる。図の様に disc  $D$  を取り、 $\varphi_a(D) \subset D$  を得る。



従って、次が成り立つ。

#### 命題 2.2

Hénon-like family  $(\varphi_a)_a$  に対し、 $\Lambda = \overline{W^u(P(\varphi_a))}$  とおき、上の様に  $a = 2$  の近くの  $a_-, a_+$  を定める。 $(\varphi_a)_a$  が orientation preserving ならば、 $a < a_-$  に対し  $\text{int} W^s(\Lambda) \neq \emptyset$  であり、 $(\varphi_a)_a$  が orientation reversing ならば、 $a < a_+$  に対し  $\text{int} W^s(\Lambda) \neq \emptyset$  である。

さらに、 $P(\varphi_a)$  の安定多様体もあわせて考えると、次が得られる。

#### 命題 2.3

$(\varphi_a)_a$  が orientation reversing ならば、 $a < a_+$  に対し  $W^s(\Lambda)$  は  $\Lambda$  の近傍である。

### §3 Critical point

定理 4 (2) を示すために、Hénon-like family  $(\varphi_a)_a$  に対し 1 次元写像  $Q_a(x) = 1 - ax^2$  の議論を適用する。考える parameter  $a$  の範囲は、 $a = 2$  に近く、 $a < 2$  かつ  $a < a_+$  (または  $a < a_-$ ) であるとする。ここで、 $a_+$  と  $a_-$  は前節のものである。

1 次元写像と同様に、 $\delta > 0$  を十分小さく取って固定する。 $b > 0$  は必要に応じて十分小さいと考える。

$z_1 \in W^u = W^u(P(\varphi_a))$  と  $n \geq 0$  に対し、 $z_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}) = \varphi_a^n(z_1)$  とおく。また、 $w_n = w_n(z_1) = D\varphi_a^n(z_1) \cdot (1, 0)$  とおく。

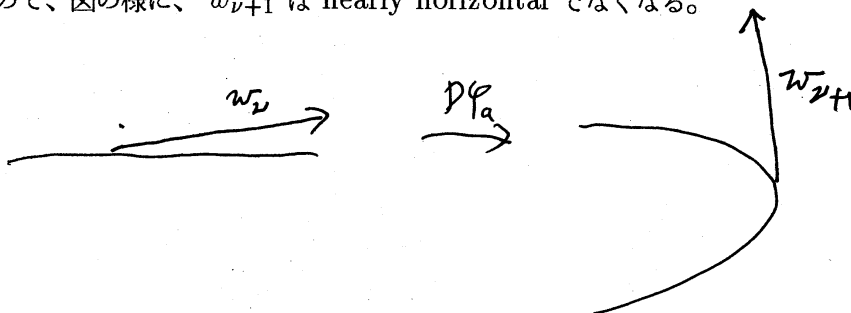
$$D\varphi_a \doteq \begin{pmatrix} -2ax & \pm\sqrt{b} \\ \pm\sqrt{b} & 0 \end{pmatrix}$$

より、 $|x_n| \geq \delta$  である限り、 $w_n$  はほとんど水平 (nearly horizontal) であり、

$$\|w_n\| \doteq 2a|x_n|\|w_{n-1}\|$$



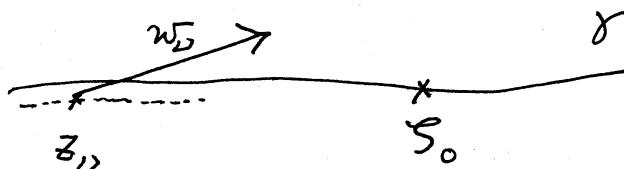
となる。 $\nu > 0$  が return (すなわち、 $|x_\nu| < \delta$ ) の場合を考えてみる。このとき、 $\varphi_a$  により "fold" が生ずるので、図の様に、 $w_{\nu+1}$  は nearly horizontal でなくなる。



領域  $\{|x| > \delta\}$  において、 $D\varphi_a$  は  $y$  軸方向に強い contraction の方向を持つ様に思える。そこで、この領域において contraction の方向  $e^{(\infty)}(z)$  ( $z$  における一つの単位ベクトル) があったとしてみる。さらに、 $z$  が  $W^u$  の "fold" の点であるとき、 $e^{(\infty)}(z)$  は  $z$  における  $W^u$  の接線に平行な単位ベクトルであるとする。 $w_{\nu+1}$  を水平なベクトル  $\omega_{\nu+1}$  と  $e^{(\infty)}(z_{\nu+1})$  に平行なベクトル  $\sigma_{\nu+1}$  に分解する。

$$w_{\nu+1} = \omega_{\nu+1} + \sigma_{\nu+1}$$

$\sigma_{\nu+1}$  を  $D\varphi_a$  で写していくと、急激に 0 に収束していく。従って、 $w_{\nu+1}$  と  $\omega_{\nu+1}$  を  $D\varphi_a$  で何回か写してやると、ほぼ同じになる。そこで、 $\frac{\|w_{\nu+1}\|}{\|\omega_{\nu+1}\|}$  を評価したい。この為に、 $z_{\nu+1}$  の近くで "critical point"  $\zeta_0 = (\xi_0, \eta_0) \in W^u$ 、 $|\xi_0| < \delta$  を取る。ここで、 $\zeta_0$  が "critical point" であるとは、 $\varphi_a(\zeta_0)$  が  $W^u$  の "fold" の点のときをいう。 $z_\nu$  と  $\zeta_0$  の関係は図の様であるとする。



すなわち、 $\gamma$  は  $W^u$  の中の nearly flat な曲線であり、 $z_\nu$  と  $\gamma$  の距離  $dist(z_\nu, \gamma)$  は

$$(3.1) \quad dist(z_\nu, \gamma) \ll |z_\nu - \zeta_0|$$

を満たすとする。このとき、 $w_\nu$  は  $\gamma$  に接していると思うこと出来るので、 $D\varphi_a(\zeta_0) \cdot w_\nu$  は  $e^{(\infty)}(\varphi_a(\zeta_0))$  にはほぼ平行、従って、 $\sigma_{\nu+1} \doteq D\varphi_a(\zeta_0) \cdot w_\nu$  となり

$$\begin{aligned} \|\omega_{\nu+1}\| &\doteq \|D\varphi_a(z_\nu) \cdot w_\nu - D\varphi_a(\zeta_0) \cdot w_\nu\| \\ &\doteq 2a|z_\nu - \zeta_0|\|w_\nu\| \\ &\cong |z_\nu - \zeta_0|\|w_\nu\| \end{aligned}$$

このことから、1次元写像  $Q_a$  と同様の議論が可能となり、 $\|w_n\|$  の増大を計算することが出来る。

上の筋書きで問題になるのは、contraction の方向  $e^{(\infty)}(z)$  の存在である。実際、 $e^{(\infty)}(z)$  の存在と  $\|w_n\|$  が指数的に増大することは、双対的な関係になっている。そこで、上の議論を、反復の回数（以後、時間と呼ぶ） $n$  に関する帰納法によって進める。

$\|w_k\|$  が時間  $n-1$  まで指数的に増大すると仮定して、contraction 方向の近似（contractive approximation） $e^{(n-1)}$  と critical point の近似（critical approximation） $z_0^{(n-1)}$  を構成する。また、return に対して (3.1) を満たす critical approximation の点  $\zeta_0$  を選びたいので、ある程度たくさんの critical approximation の点を用意しなければならない。そこで、critical approximation の点の集合  $\mathcal{C}_n$  を構成する。この後、1次元写像と同様の議論によって、parameter  $a$  に関する条件 (BA)、(FA) を仮定して、 $\|w_k\|$  が時間  $n$  まで指数的に増大することを証明する。

すべての時間  $n$  にわたって (BA)、(FA) を満たす parameter  $a$  の集合  $E$  が Lebesgue 測度正であることは、1次元写像の場合と同様、“bounded distortion” を示すことにより得られる。ただし、critical approximation の点  $z_0^{(n-1)}$  は  $W^u = W^u(P(\varphi_a))$  に属しているので、parameter  $a$  に依存する。しかし、 $z_0^{(n-1)} : a \mapsto z_0^{(n-1)}$  は  $C^{r-1}$  写像であり、微分は  $\|\dot{z}_0^{(n-1)}\| \leq b^\tau$  であることが証明され、1次元写像の場合と同じような議論ができる。ここで  $\tau > 0$  は、critical approximation の点、時間  $n$  等に依存しない定数である。この証明において、Hénon-like family  $(\varphi_a)_a$  の高い微分可能性が必要になる。

最後に、各  $a \in E$  に対し、 $n \rightarrow \infty$  として  $\mathcal{C}_n$  の集積点の一つ取って  $z_0$  とする。このとき、 $z_1 = \varphi_a(z_0)$  は定理 4 (2) の (ii) を満たしている。 $E$  の Lebesgue 測度が正であることから、背理法により、(i) が成り立つ parameter  $a$  の集合  $\subset E$  も Lebesgue 測度正であることが証明される。

以下では、contractive approximation、critical approximation、帰納法の構造をもう少し具体的に説明する。 $E$  の Lebesgue 測度が正の証明は、1次元写像  $Q_a$  の場合とほぼ同じなので、省略する。

#### §4 Contractive approximation

$\lambda$  を次の不等式を満たす実数とする。ここでは、 $\lambda \geq 1$  を仮定しないでおく。

$$\lambda \geq \left( \frac{\delta}{10K} \right)^{10} \gg b > 0$$

##### 定義 3

$z_1$  が時間  $n$  まで  $\lambda$ -expanding であるとは

$$\|w_k(z_1)\| \geq \lambda^k \quad (1 \leq \forall k \leq n)$$

が成り立つときをいう。

$z_1$  における接平面の上の単位円  $S = \{v : \|v\| = 1\}$  は、 $D\varphi_a^k(z_1)$  によって楕円  $S'$  に写される。そこで単位ベクトル  $e^{(k)} \in S$  を、 $D\varphi_a^k(e^{(k)})$  が楕円  $S'$  の短軸にある様にとる。また、 $f^{(k)} \in S$  を  $D\varphi_a^k(f^{(k)})$  が楕円  $S'$  の長軸にある様にとる。このとき、 $e^{(k)}$  と  $f^{(k)}$  は直交する。従って

$$\|D\varphi_a^k(e^{(k)})\| \cdot \|D\varphi_a^k(f^{(k)})\| = |\det D\varphi_a^k| \leq (Kb)^k.$$

$z_1$  が時間  $n$  まで  $\lambda$ -expanding であるとする

$$\|D\varphi_a^k(f^{(k)})\| \geq \lambda^k, \quad \|D\varphi_a^k(e^{(k)})\| \leq \left(\frac{Kb}{\lambda}\right)^k$$

ここで  $0 < \frac{Kb}{\lambda} \ll 1$  に注意する。

#### 補題 4.1

$z_1$  は時間  $n$  まで  $\lambda$ -expanding であるとする。このとき、任意の  $1 \leq \mu \leq k \leq n$  に対し、次が成り立つ。

$$(a) |\angle(e^{(\mu)}, e^{(k)})| \leq \frac{3K}{\lambda} \left(\frac{Kb}{\lambda}\right)^\mu$$

$$(b) \|D\varphi_a^\mu(z_1)e^{(k)}\| \leq \frac{4K}{\lambda} \left(\frac{K^2b}{\lambda^2}\right)^\mu$$

もし  $z_1$  が、すべての  $n$  について、時間  $n$  まで  $\lambda$ -expanding であると仮定すると、補題 4.1(a) から  $e^{(n)}$  はある単位ベクトル  $e^{(\infty)}$  に収束し、(b) から  $e^{(\infty)}$  は  $z_1$  における contraction の方向となる。

#### 定義 4

$z_1$  が時間  $n$  まで  $\lambda$ -expanding であるとき、上の  $e^{(n)}(z_1) = e^{(n)}$  を  $z_1$  における  $n$  次の contractive approximation と呼ぶ。 $e^{(n)}(z_1)$  は nearly vertical である。実際、 $y$  軸と  $e^{(n)}(z_1)$  の角度は  $\sqrt[4]{b}$  以下である。

#### 定義 5

$z_1 = \varphi_a(z_0) \in W^u$  は時間  $n$  まで  $\lambda$ -expanding とし、 $e^{(n)}(z_1)$  を  $z_1$  における  $n$  次の contractive approximation とする。 $e^{(n)}(z_1)$  が  $z_1$  において  $W^u$  に接しているとき、 $z_0$  を  $n$  次の critical approximation と呼ぶ。

#### 補題 4.2

$z_1 = \varphi_a(z_0)$  は時間  $n$  まで  $\lambda$ -expanding であるとし、 $\sigma = \frac{\lambda}{4K^2}$  とする。このとき、 $|z_0 - \zeta_0| \leq \sigma^n$  となるすべての  $\zeta_1 = \varphi_a(\zeta_0)$  に対し

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\|w_k(z_1)\|}{\|w_k(\zeta_1)\|} \leq 2 \quad (1 \leq \forall k \leq n)$$

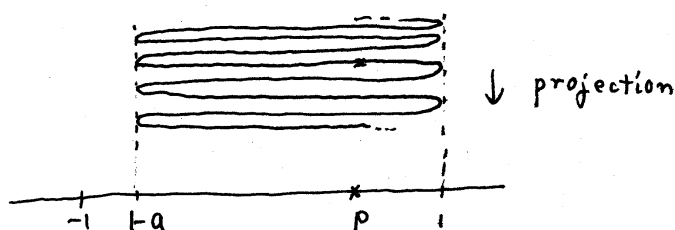
#### 補題 4.3

$K_0 = K_0(K, \lambda) > 0$  が存在して

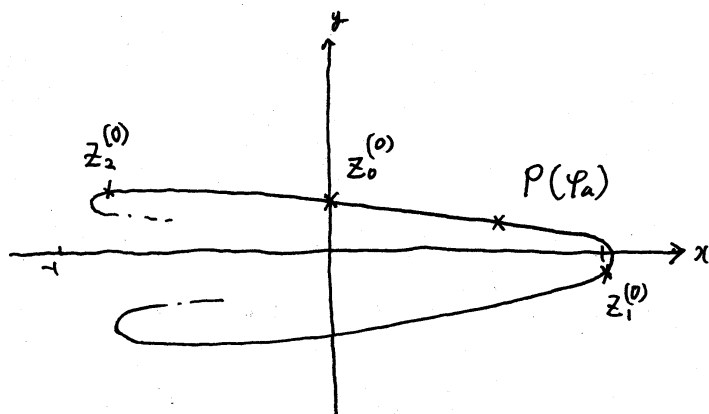
$$\|e^{(k)}\|_{C^2(a, x, y)} \leq K_0 b \quad (1 \leq \forall k \leq n)$$

## §5 帰納法の為の準備

パラメータ値  $a=2$  の近くに、区間  $\Omega_0 \subset (1, 2)$  を  $\sup \Omega_0 < a_+$  あるいは  $\sup \Omega_0 < a_-$  とする様にとる。§2 で見た様に、双曲型不動点  $P(\varphi_a)$  の不安定多様体  $W^u = W^u(P(\varphi_a))$  は  $[-1, 1] \times \{0\}$  の近傍に含まれてゐる。また、 $\varphi_a(x, y) = (1 - ax^2, y)$  の不安定多様体  $W^u(P(\varphi_a)) = [-1 - a, 1]$  は



の様に埋め込まれてゐるので、局所不安定多様体の変化の連続性 (命題 2.1) より、 $b > 0$  が十分小さいとき、 $W^u = W^u(P(\varphi_a))$  は



の様になる。  $W^u$  の中で  $p = P(\varphi_a)$  に最も近い  $W^u \cap \{x=0\}$  の点を  $z_0^{(0)}$  で表わす。  $z_1^{(0)} = \varphi_a(z_0^{(0)})$ ,  $z_2^{(0)} = \varphi_a^2(z_0^{(0)})$  とおいて、 $z_1^{(0)}$  と  $z_2^{(0)}$  を端点とする  $W^u$  の中の弧を  $G_0 = [z_1^{(0)}, z_2^{(0)}]$  で表わす。  $G_0$  の点の generation は 0 であるという。さうして  $g \geq 1$  に対し、  $G_g = \varphi_a^g(G_0) \cup \varphi_a^{g-1}(G_0)$  とおき、

$G_g$  の点の generation は  $g$  であるという。

**定義 6**  $\gamma$  が  $C^2(b)$ -curve であるとは、 $\gamma$  はある関数  $y = y(x)$  のグラフであり、微分について、 $|\dot{\gamma}|, |\ddot{\gamma}| \leq \sqrt[4]{b}$  となることをいう。

$\delta_0 = 5(2-a) > 0$  とおく。  $G_0 \cap \{|x| \leq 1-\delta_0\}$  は  $C^2(b)$ -curve となる。実際、 $G_0 \cap \{|x| \leq 1-\delta_0\}$  が関数  $y = y(x) = y_\varphi(a, x)$  のグラフであるとすると、

$$\|y_\varphi\|_{C^2(a, x)} \leq \text{const} \sqrt{b} < \sqrt[4]{b}$$

となる。また、 $n \geq 1$  が与えられたとき、任意の  $g \leq n$  に対し  $G_g \cap \{|x| \leq 1-\delta_0\}$  は  $2^{g-1}$  個の成分からなり、それぞれの成分は  $C^2(b)$ -curve となる。ここで、 $n$  を大きく取る為には、 $b > 0$  を十分小さくしなければならぬ。

$0 < C_0 < \log 2$  を固定する。次の補題より、 $z_1^{(0)} = \varphi_a(z_0^{(0)})$  は時間  $N-1$  まで  $e^{C_0}$ -expanding となる。

**補題 6.1**  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(c_0, \delta) > 0$ ,  $b_0 = b_0(c_0, \delta) > 0$  が存在して、 $a \in [2-\varepsilon_0, 2+\varepsilon_0]$ ,  $0 < b < b_0$  ならば、 $\varphi_a$  は次の性質をもつ。  
 $z_0$  に対し、 $(x_k, y_k) = z_k = \varphi_a^k(z_0)$  ( $k \geq 0$ ) とおく。 $|x_k| \geq \delta$   
 $1 \leq k \leq n$  ならば、 $z_1$  における単位ベクトルで  $|\text{slope}(v)| \leq \sqrt[4]{b}$  となる  $v$  に対し

$$(A) \quad |\text{slope } D\varphi_a^k(z) \cdot v| \leq \sqrt[4]{b},$$

$$\|D\varphi_a^{k_r}(z_1) \cdot v\| \leq a |x_{k_r}| \|D\varphi_a^{k_r-1}(z_1) \cdot v\|$$

$$(1 \leq k_r \leq n)$$

(b)  $|x_0| \leq \delta$  または  $|x_{n+1}| \leq \delta$  ならば、

$$\|D\varphi_a^n(z_1) \cdot v\| \geq e^{nc}.$$

従って、§4 で見たように、 $z_1^{(0)}$  における  $k$  次の critical approximation  $e^{(k)}(z_1^{(0)})$  ( $1 \leq k \leq N-1$ ) が定義される。

$$\sigma_1 = \frac{1}{10K^2}$$

と置き、 $\sigma = \sigma_1^{N-1}$  とする。補題 4.2 から、 $|x| < \sigma$  とする  $z = z(x) =$

$(x, y(x)) \in G_0$  に対し  $\varphi_a(z(x))$  は  $N-1$  まで expanding である。

$1 \leq k \leq N-1$  とし、 $e^{(k)}(\varphi_a(z(x)))$  を  $\varphi_a(z(x))$  における  $k$  次の critical approximation とする。 $\xi^{(k)}(x) \in \mathbb{R}$  を  $(\xi^{(k)}(x), 1)$  が  $e^{(k)}(\varphi_a(z(x)))$  に平行になる様にとる。critical approximation は nearly vertical であるから、

$$(5.1) \quad |\xi^{(k)}(x)| \leq \sqrt{b}$$

また補題 4.3 より

$$(5.2) \quad |\dot{\xi}^{(k)}(x)| \leq 2K K_0 \sqrt{b}$$

$\varphi_a(z(x))$  における  $W^n$  の接線方向を  $(t(x), 1)$  とおくと

$$t(x) = \frac{A(z(x)) + B(z(x)) \dot{y}(x)}{C(z(x)) + D(z(x)) \dot{y}(x)}$$

そこで  $\begin{pmatrix} A & B \\ c & d \end{pmatrix} = D \varphi_a$ . 　　こゝより

$$(5.3) \quad |\dot{t}(x)| \geq \frac{1}{K\sqrt{b}}$$

$z(0) = (0, y(0))$  であるから、明らかに

$$(5.4) \quad |t(0)| \leq 2K^2$$

上の (5.1) ~ (5.4) より

$$|t(0) - z^{(1)}(0)| \leq 3K^2$$

$$|\dot{t}(0) - \dot{z}^{(1)}(0)| \geq \frac{1}{2K\sqrt{b}}$$

$b > 0$  は十分小だから、 $x^{(1)} \in (-\sigma, \sigma)$  がただ一つ存在して、

$$t(x^{(1)}) = z^{(1)}(x^{(1)})$$

そこで  $|x^{(1)}| \leq 6K^3\sqrt{b}$  となる。  $z_0^{(1)} = (x^{(1)}, y(x^{(1)}))$  と

おく。積成から  $\varphi(z_0^{(1)})$  は 1 次の critical approximation となる。

補題 4.1 (a) より

$$|q^{(2)}(x^{(1)}) - q^{(1)}(x^{(1)})| \leq 3K^2 b$$

(5.2), (5.3) より

$$|t(x^{(1)}) - q^{(2)}(x^{(1)})| \leq 3K^2 b$$

$$|\dot{t}(x) - \dot{q}^{(2)}(x)| \geq \frac{1}{2K\sqrt{b}}$$

よって、 $x^{(2)} \in (-\sigma, \sigma)$  がただ一つ存在して

$$t(x^{(2)}) = q^{(2)}(x^{(2)})$$

そこで  $|x^{(2)} - x^{(1)}| \leq 6K^3 K\sqrt{b}$

$z_0^{(2)} = (x^{(2)}, y(x^{(2)}))$  とおく。これは 2 次の critical approximation である。以下 同様にして、各  $1 \leq k \leq N-1$  に対し

$z_0^{(k)} = (x^{(k)}, y(x^{(k)}))$ ,  $x^{(k)} \in (-\sigma, \sigma)$  がただ一つ存在して

次の critical approximation となる。また、

$$|z_0^{(k+1)} - z_0^{(k)}| \leq 10\sqrt{b} k^{k+2} b^k \leq (kb)^k$$

以上で、 $N-1$  までの次数の critical approximation が  $G_0$  の中の  $y$  軸に近い所に構成された。

次に、上である critical approximation から次の critical approximation を構成する為のアルゴリズム  $A, B$  について述べる。

$0 < C < C_0$  となる  $C$  を固定する。

**アルゴリズム A**  $\gamma$  は  $W^n$  の中の  $C^2(b)$ -curve で、 $z_0^{(n-1)} \in \gamma$  とする。 $z_1^{(n-1)} = \varphi_a(z_0^{(n-1)})$  は時間  $n$  まで  $e^C$ -expanding であり、 $z_0^{(n-1)}$  は  $n-1$  次の critical approximation であるとする。

さらに、 $\gamma$  の両端点は、 $z_0^{(n-1)}$  から  $\sigma_1^n$  の距離にあると仮定する。このとき、補題 4.2 より、 $\gamma$  のすべての点  $z$  は時間  $n$  まで expanding であり、 $\varphi_a(z)$  における  $n$  次の contractive approximation  $e^{(n)}(\varphi_a(z))$  が定まる。上で述べた議論から、 $n$  次の critical approximation  $z_0^{(n)} \in \gamma$  が存在して

$$|z_0^{(n)} - z_0^{(n-1)}| \leq (kb)^n (\leq \sigma_1^n)$$

となる。 □

**アルゴリズム B**  $\gamma, \bar{\gamma}$  を  $W^n$  の中の  $C^2(b)$ -curve とする。

$|x - x_0| \leq \varrho$  となる  $x$  に対し、 $\gamma$  の点は  $z(x) = (x, y(x))$  で表わされ、 $\bar{\gamma}$  の点は  $\bar{z}(x) = (x, \bar{y}(x))$  で表わされているとする。



$z_0 = z(x_0) \in \mathcal{I}$ ,  $\mathcal{I}_0 = \bar{z}(x_0) \in \bar{\mathcal{I}}$  とおく。次の B1, B2, B3 を仮定する。

B1  $\mathcal{I}_1 = \varphi_a(\mathcal{I}_0)$  は時間  $n$  まで  $e^c$ -expanding であり  $\mathcal{I}_0$  は  $n$  次の critical approximation である。

$$B2. \quad d := |z_0 - \mathcal{I}_0| \leq \frac{\sigma_1^{2n}}{100 K^3}$$

このとき、補題 4.2 から  $z_1 = \varphi_a(z_0)$  は時間  $n$  まで expanding となる。

$$B3. \quad d \geq 200 K^3 \sqrt{d}$$

この仮定より、上で述べた議論が適用でき、 $n$  次の critical approximation  $z_0^{(n)} = (x^{(n)}, y(x^{(n)})) \in \mathcal{I}$  が存在し、

$$|x^{(n)} - x_0| \leq 50 K^3 \sqrt{d} \leq \frac{d}{4}$$

が成り立つ。 □

$1 \leq k \leq N-1$  に対し、 $z_0^{(k)} \in G_0 \cap \{bu < 1 - \delta_0\}$  を上で構成した  $k$  次の critical approximation とし、 $\bar{\mathcal{I}} = G_0 \cap \{bu \leq 1 - \delta_0\}$   $\mathcal{I} = G_1 \cap \{bu \leq 1 - \delta_0\}$  とおく。このとき、 $\mathcal{I}_0 = z_0^{(k)} \in \bar{\mathcal{I}}$  に対し、上のアルゴリズム B の仮定がすべて成り立つ。従って  $k$  次の critical approximation  $w_0^{(k)} \in \mathcal{I}$  が構成される。今、 $k \leq N-1$  に対し  $k$  次の critical set  $\mathcal{C}_k$  を

$$\mathcal{C}_k = \{z_0^{(k-1)}, w_0^{(k-1)}\}$$

で定義する。

## §6 帰納法の構造

$n \geq N$  とし、各  $1 \leq k \leq n-1$  に対し  $k$  次の critical set  $\mathcal{C}_k$  が定義されているとする。以下で述べる仮定 1~7 が  $\mathcal{C}_k$  ( $1 \leq k \leq n-1$ ) に対し仮定されている。

**仮定 1**  $\mathcal{C}_k$  は  $k-1$  次の critical approximation から成る集合で、各  $z_0^{(k-1)} \in \mathcal{C}_k$  の generation  $\leq \theta k$  である。ここで

$$\theta = \theta(b) = \frac{100 \cdot 3^r \cdot \log \sigma_1^{-1}}{\log \frac{1}{b}}$$

さらに  $z_1^{(k-1)} = \varphi_a(z_0^{(k-1)})$  は時間  $k$  まで  $e^c$ -expanding である。  $\square$

**仮定 2**  $z_0^{(k-1)} \in \mathcal{C}_k$  とし、その generation を  $0 \leq g \leq \theta k$  とする。 $C^2(b)$ -curve  $\gamma = \gamma(z_0^{(k-1)}, \rho^{\theta k})$  が存在し、 $\gamma$  の両端点と  $z_0^{(k-1)}$  との距離はそれぞれ  $\rho^{\theta k}$  であり、 $\gamma \subset G_g$ 。ここで

$$\rho = \left(\frac{\lambda_0}{K}\right)^6 \sigma_2 \quad \lambda_0 = \left(\frac{\delta}{2}\right)^4 \quad \sigma_2 = \frac{\left(\frac{\lambda_0}{K}\right)^8}{10K^2}$$

さらに  $g \geq 1$  ならば、 $\gamma_0 = \varphi_a^{-g}(\gamma) \subset G_1 \cap \{|x| \leq 1 - \delta_0\}$  であり、 $\gamma_0$  に接するベクトルは  $\varphi_a^{g-1}$  で expand する。  $\square$

仮定 2 より、 $\gamma(z_0^{(k-1)}, \frac{1}{4}\rho^{\theta k}) \cap \mathcal{C}_k = \{z_0^{(k-1)}\}$  となる。

従って  $\mathcal{C}_k$  の元の数は

$$(6.1) \quad \# \mathcal{C}_k \leq 8 \left(\frac{K}{\rho}\right)^{\theta k}$$

**定義 7**  $\xi_0$  が時間  $P$  まで  $\mathcal{L}_k$  に bind されるとは、

$z_0 = z_0^{(k-1)} \in \mathcal{L}_k$  が存在して

$$(BC1) \quad |\xi_j - z_j| \leq h_k e^{-\beta j} \quad 1 \leq j \leq P$$

ここで  $\beta > 0$  は十分小さいとし

$$h_k = 3 - \sum_{i=1}^{k-1} (e^{\beta} \sigma_i)^i \in (2, 3)$$

特に  $P=k$  のときは単に、 $\xi_0$  は  $\mathcal{L}_k$  に bind されるという。

**仮定 3**  $\xi_0$  が  $\mathcal{L}_k$  に bind されているならば、 $\xi_1 = \varphi_a(\xi_0)$  は時間  $k$  まで  $e^c$ -expanding である。  $\square$

**仮定 4**  $\mathcal{L}_k$  に bind されている点  $\xi$  は、 $\mathcal{L}_{k-1}$  にも bind されている。  $\square$

### § 6.1 $\mathcal{L}_n$ の構成.

$\mathcal{L}_{n-1}$  から  $n$  次の critical set  $\mathcal{L}_n$  を次の様に構成する。

仮定 1 より、 $z_0^{(n-2)} \in \mathcal{L}_{n-1}$  に対し、 $z_1^{(n-2)} = \varphi_a(z_0^{(n-1)})$  は時間  $n-1$  まで  $e^c$ -expanding である。また、仮定 2 より、 $g$  を  $z_0^{(n-2)}$  の generation とすると、 $\mathcal{C}^2(b)$ -curve  $\delta(z_0^{(n-2)}, \rho^{\theta(n-2)}) \subset G_g$  が存在する。 $z_0^{(n-2)}$  に § 5 のアルゴリズム  $A$  を適用し、 $n-1$  次の critical approximation  $\xi_0^{(n-1)} \in \delta(z_0^{(n-2)}, \rho^{\theta(n-1)})$  を作る。このとき、

$$(6.2) \quad |\xi_0^{(n-1)} - z_0^{(n-2)}| \leq (kb)^{n-2} \leq \sigma_1^{n-1}$$

となる。 $\mathcal{L}_n' = \{\xi_0^{(n-1)} : z_0^{(n-2)} \in \mathcal{L}_{n-1}\}$  とおく。

次に, 各  $y_0^{(n-1)} \in \mathcal{C}_n'$  に §5 の アルゴリズム  $B$  を適用する (適用できない場合は ことを行わない) :  $\theta(n-1) < \theta \leq \theta n$  とし,  $\bar{\sigma}$  を  $G_g$  の  $C^2(b)$ -curve とする。  $\bar{\sigma}$  と  $\sigma = (y_0^{(n-1)}, \rho^{\theta n})$  は アルゴリズム  $B$  の仮定を満たして

$$\text{dist}(y_0^{(n-1)}, \bar{\sigma}) \leq b^{\frac{1}{20}\theta} \leq b^{\frac{1}{20}\theta(n-1)} \leq \sigma_1^{n-1}$$

であるとする。このとき, アルゴリズム  $B$  により,  $n-1$  次の critical approximation  $z_0^{(n-1)} \in \bar{\sigma}$  が構成され,

$$(6.3) \quad |z_0^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| \leq b^{\frac{1}{50}\theta} \leq b^{\frac{1}{50}\theta(n-1)} \leq \sigma_1^{n-1}$$

が成り立つ。  $\mathcal{C}_n'' = \{z_0^{(n-1)} : y_0^{(n-1)} \in \mathcal{C}_n'\}$  とおく。

$n$  次の critical set を  $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}_n' \cup \mathcal{C}_n''$  により定義する。

(6.2) と (6.3) より, 時間  $n$  において 仮定 4 が成り立つ。

また 仮定 1 と 仮定 2 の前半が成立する。従って, われわれの目的は, 時間  $n$  において, 仮定 3 を示すことである。この為に, 1次元写像と同様, (BA) と (FA) を仮定する必要がある。

## §6.2 return, binding point, binding period.

$1 \leq k \leq n-1$  とする。各  $z_0 \in \mathcal{C}_k$  と 時間  $\leq k$  に対し, return, binding point, binding period が定義されているとする。

$z_0$  が  $\mathcal{C}_k$  に bind されているならば, 定義より

$z_0 = z_0^{(k-1)} \in \mathcal{C}_k$  が存在して (BC1) が成立する。そこで、 $\gamma_0$  の return, binding point, binding period は、 $z_0$  のものと同じであると定義する。

$\gamma_0$  が  $\mathcal{C}_n$  に bind されているとする。このとき、 $\gamma_0$  は  $\mathcal{C}_n$  に bind されている。従って、この様な  $\gamma_0$  と時間  $\leq n-1$  に対し return, binding point, binding period がすでに定義されている。

$z_0 \in \mathcal{C}_n$  と時間  $n$  に対し return, binding point, binding period を次の様に定める。

$z_0$  の return  $\nu \leq n-1$  があって、その binding period に  $n$  が属している場合： $\nu < n$  をその様な return の中の最大のものとし、 $\gamma_0$  を  $z_\nu$  の binding point とする。

$n-\nu$  が  $\gamma_0$  の return ならば（このとき、 $\gamma_0 \in \mathcal{C}_{n-\nu}$  で、 $n-\nu$  は後で述べる  $\gamma_0$  の free-return である。）、 $n$  を  $z_0$  の bounded return と呼ぶ。  $\gamma_{n-\nu}$  の binding point が  $\mathcal{C}_{n-\nu}$  から選ばれている（帰納法の仮定）。この点から、 $z_n$  の binding point とする。  $z_n$  の binding period  $[n+1, n+p]$  を、  $\gamma_{n-\nu}$  の binding period  $[n-\nu+1, n-\nu+p]$  によって定義する。

上の場合でなくとも： $|x_n| < \delta$ ,  $z_n = (x_n, y_n)$  であるならば、 $n$  を  $z_n$  の free return と呼ぶ。この場合、

$z_n$  に対し、ある アルゴリズム で  $z_n$  から  $s_0$  をたどって  
選ぶことが出来る。この後で、仮定される。

$$(BA) \quad d_n(z_0) := |z_n - s_0| \geq e^{-\alpha n}$$

ここで  $\alpha > 0$  は十分小で  $0 < \alpha \ll \beta$  である。

この仮定 (BA) の下で、§3 で述べた (3.1) 等が証明さ  
れる。  $s_0$  を  $z_n$  の binding point と定める。 binding  
period  $[n+1, n+p]$  を定義する為、先ず primary  
binding period  $p_0 \geq 1$  を次を満たす最大の数とする:

$$(BC2) \quad |z_{n+j} - s_0| \leq h e^{-\beta j} \quad 1 \leq j \leq p_0$$

$$h = \frac{1}{10} \exp(-50K \sum_{\alpha=1}^{\infty} e^{-\epsilon \alpha}) \leq 1.$$

このとき

$$(6.4) \quad p_0 \leq 5 \log d_n(z_0)^{-1} \leq 5\alpha n < n$$

が証明される。これは 時間  $k \leq n-1$  に対して仮定されて  
いる (仮定 6)。 (BC2) より、  $z_n$  は 時間  $p_0$  まで  
 $s_0$  に bind される。したがって  $[1, p_0]$  において、  $z_n$  の  
return, binding period が定義されている。  $P$  を

- $P$  は  $z_n$  に対する free iterate 存在せず、  $P$  は  
 $z_n$  の (定義より  $s_0$  の) 任意の binding period  
に属さない。
- $1 \leq p \leq p_0$  の中で最大。

により定める。このとき、  $P = p_0$ 。又は  $P$  は return で

ある。  $P \doteq P_0$ 。正確には  $P_0 - P \leq 10\alpha P_0$ 。であることが帰納法の仮定により容易に証明される。また、

$$\begin{aligned}
 (6.5) \quad |z_{n+p+1} - s_{p+1}| &\leq |z_{n+p_0+1} - s_{p_0+1}| K^{-10\alpha P_0} \\
 &\geq h e^{-\beta(P_0+1)} K^{-10\alpha P_0} \\
 &\geq h e^{-2\beta(P+1)}
 \end{aligned}$$

が成り立つ。

$z_0^{(n-1)} \in \mathcal{C}_n$  が  $n$  まで  $e^c$ -expanding を与えるには、 $k \leq n-1$  に対し binding period  $[k+1, k+p]$  において  $z_0^{(n-1)}$  は expanding であることが帰納法の仮定から導かれるなければならない。そこで、fold, splitting algorithm によって述べる。

### §6.3 fold.

$z_0 \in \mathcal{C}_k$  とし、 $k$  は  $z_0$  の free return とする。このとき、primary folding period  $[k+1, k+l_0]$  を

$$l_0 = \frac{10 \log K}{\log \frac{1}{b}} \log d_k(z_0)^{-1} + i$$

で定めよう。ここで  $0 \leq i \leq 4$  は  $k+l_0+1$  が return でなく  $2\delta < |x_{k+l_0+1}| < 1-2\delta$  を満たすように選ぶ。

$P$  を  $z_k$  に対する binding period の長さとするとき、(6.5) より

$$P \geq \frac{\log d_k(z_0)^{-1}}{2(\log K + 2\beta)}$$

よ、 $\tau$   $\ell_0 \ll P$  と存る。  $F = [k+1, k+\ell]$  が folding period であることを

- $[k+1, k+\ell]$  の中の任意の return  $\omega$  に対し  $\omega$  の primary folding period の end  $\leq k+\ell$  である
- $\ell \geq \ell_0$  の中で最小

により定める。このとき

- $[k'+1, k'+\ell']$  が folding period であり,  $\ell'+1 \in F$  ならば  $k'+\ell' \in F$
- $k+\ell$  は return でなく,  $2\delta < |x_{k+\ell+1}| < 1-2\delta_0$

が成り立つ。さらに

$$\frac{10 \log K}{\log \frac{1}{\epsilon}} \log d_k(z_0)^{-1} \leq \ell \leq \frac{20 \log K}{\log \frac{1}{\epsilon}} d_k(z_0)^{-1} + 4$$

となり,  $\ell \neq \ell_0$  が成り立つ。

binding period と同様,  $\gamma_k$  に bind されている任意の  $\xi_0$  とその return に対し, folding period が定義される。

#### §6.4 splitting algorithm

§3 で述べた分解を、正確に述べると次の様になる。

$1 \leq k \leq m-1$  とし,  $\xi_0$  は  $\gamma_k$  に bind されているとする。

各  $0 \leq \mu \leq k$  に対し,  $w_\mu = w_\mu(\xi_0) = D\varphi_a^\mu(\xi_0) \cdot (1, 0)$



とおく。  $w_\mu$  を次の様に分解する。

$$w_\mu = \tilde{w}_\mu + \tilde{\sigma}_\mu$$

$\mu = \tau$

$$1. \quad w_0 = \tilde{w}_0 = (1, 0), \quad \tilde{\sigma}_0 = 0$$

$$2. \quad \tilde{w}_\mu = D\varphi_a(\xi_\mu) \cdot w_{\mu-1}, \quad \tilde{\sigma}_\mu = D\varphi_a(\xi_\mu) \cdot \tilde{\sigma}_{\mu-1}$$

3.  $\mu$  が  $\xi_0$  の return のとき,

$$\tilde{w}_\mu = \alpha_\mu \cdot e^{(l)}(\xi_{\mu+1}) + \beta_\mu \cdot (1, 0)$$

$\mu = \tau$   $l$  は folding period  $\tau$ ,  
 $e^{(l)}(\xi_{\mu+1})$  は  $l$  次の contractive approximation.

と置いて。

$$w_\mu = \tilde{w}_\mu - \alpha_\mu \cdot e^{(l)}(\xi_{\mu+1}) = \beta_\mu \cdot (1, 0)$$

$$\sigma_\mu = \tilde{\sigma}_\mu + \alpha_\mu \cdot e^{(l)}(\xi_{\mu+1})$$

4.  $\mu$  が folding period の end  $\mu = \mu_1 + l_1$  のとき,

$$w_\mu = \tilde{w}_\mu + \alpha_{\mu_1} D\varphi_a^{l_1}(\xi_{\mu_1+1}) \cdot e^{(l)}(\xi_{\mu_1+1})$$

$$\sigma_\mu = \tilde{\sigma}_\mu - \alpha_{\mu_1} D\varphi_a^{l_1}(\xi_{\mu_1+1}) \cdot e^{(l)}(\xi_{\mu_1+1})$$

一般に  $S \geq 1$  とて

$[\mu_1, \mu_1 + l_1], \dots, [\mu_s, \mu_s + l_s]$  が  $\mu$  を経るとき,

$$w_\mu = \tilde{w}_\mu + \sum_{i=1}^S \alpha_{\mu_i} \cdot D\varphi_a^{l_i}(\xi_{\mu_i+1}) \cdot e^{(l)}(\xi_{\mu_i+1})$$

$$\sigma_\mu = \tilde{\sigma}_\mu - \sum_{i=1}^S \alpha_{\mu_i} \cdot D\varphi_a^{l_i}(\xi_{\mu_i+1}) \cdot e^{(l)}(\xi_{\mu_i+1})$$

5. 3., 4. のとき以外,  $w_\mu = \tilde{w}_\mu, \sigma_\mu = \tilde{\sigma}_\mu$

**補題 6.1**  $1 \leq k \leq n-1$  とし,  $\xi_0$  が  $\mathcal{L}_k$  に bind されて  
 いるならば, 各  $0 \leq \mu \leq k$  に対し

$$|\text{slope } \omega_\mu(\xi)| \leq \sqrt[3]{b}$$

$c_0, c, c_1, \alpha, \varepsilon > 0$  は次の様な関係式を満たすとする。

$$0 < c < c + 2\varepsilon < c_1 < c_0(1-\varepsilon) - \alpha < c_0 < \log 2.$$

各  $1 \leq k \leq n-1$  に対し, 次の仮定 5, 6, 7 が仮定されて  
 いる。

**仮定 5**  $z_0 \in \mathcal{L}_k$  とし,  $k$  が  $z_0$  の free return ならば,  
 binding point  $\xi_0 \in \mathcal{L}_k$  が選ばれていて,

$$(BA) \quad d_k(z_0) := |z_k - \xi_0| \geq e^{-\alpha k}.$$

$\xi_0$  が上の  $\xi_0$  に bind されているならば,

$$|\alpha_k(\xi_1)| \leq 4K\sqrt{b} \|\omega_{k-1}(\xi_1)\|$$

$$\frac{3}{2} a d_k(\xi_0) \leq \frac{|\beta_k(\xi_1)|}{\|\omega_{k-1}(\xi_1)\|} = \frac{\|\omega_k(\xi_1)\|}{\|\omega_{k-1}(\xi_1)\|} \leq \frac{5a}{2} d_k(\xi_0)$$

さらに,  $\mathcal{L}_k$  に bind されている  $\xi_0$  の bounded return  $\nu \leq k$   
 に対し,

$$|\alpha_\nu(\xi_1)| \leq 5K\sqrt{b} \|\omega_{\nu-1}(\xi_1)\|$$

$$a d_\nu(\xi_0) \leq \frac{|\beta_\nu(\xi_1)|}{\|\omega_{\nu-1}(\xi_1)\|} \leq 3a d_\nu(\xi_0).$$

**仮定 6**  $\nu \leq k$  を  $z_0 \in \mathcal{C}_k$  の return とし  $[\nu+1, \nu+p]$  を binding period とおくと,

$$p \leq 5 \alpha \nu < \nu$$

さらに, 定数  $\tau_1, \tau_2 > 1$  が存在して,  $\xi_0$  が  $z_0$  に時間  $\nu+1 \leq \nu+p-1$  まで bind されていなければ,

$$\frac{1}{\tau_1} \leq \frac{\|\omega_{\nu+1}(\xi_1)\|}{|\beta_\nu(\xi_1)| \|\omega_\nu(\xi_1)\|} \leq \tau_1$$

時間  $\nu+p$  まで  $z_0$  に bound されていなければ ここで  $\xi_1$  は binding point.

$$\frac{\|\omega_{\nu+p}(\xi_1)\| d_\nu(z_0)}{\|\omega_\nu(\xi_1)\|} \geq \tau_2 e^{\frac{c_1}{3}(p+1)} \geq 1$$

**仮定 7**  $F_k(a; z_0)$  を  $[1, k]$  における  $z_0$  の free iterate の個数とすると,

$$(FA) \quad F_k(a; z_0) \geq (1-\epsilon)k$$

仮定 5, 6, 7 の下で, 仮定 3 を示すことが出来る。実際,  $k \leq n-1$  とし,  $\xi_0$  は  $\mathcal{C}_k$  に bind されていなくとす。

$$\|\omega_k(\xi_1)\| = \prod_{i=1}^k \frac{\|\omega_i(\xi_1)\|}{\|\omega_{i-1}(\xi_1)\|}$$

である。  $1 < \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_s \leq k$  を  $\xi_0$  の free return とし,  $\nu = \nu_i$  に対応する binding period  $p = p_i$  とすると,

$$\text{仮定 5, 6 より} \quad \prod_{i=\nu}^{\nu+p} \frac{\|\omega_i(\xi_1)\|}{\|\omega_{i-1}(\xi_1)\|} \geq \frac{\|\omega_{\nu+p}(\xi_1)\|}{\|\omega_\nu(\xi_1)\|} d_\nu(z_0) \geq 1$$

$\mu = \nu_{i+1}$ ,  $r = \mu - \nu - p - 1$  とおいて, 補題 6.1 より.

$$\prod_{\nu+p+1}^{\mu-1} \frac{\|\omega_i(\xi)\|}{\|\omega_{i-1}(\xi)\|} = \frac{\|\omega_{\mu-1}(\xi)\|}{\|\omega_{\nu+p}(\xi)\|} = \frac{\|\omega_{\mu-1}(\xi)\|}{\|\omega_{\nu+p}(\xi)\|} \geq e^{c_0 r}.$$

ゆえに,

$$\|\omega_r(\xi)\| \geq e^{c_0 F_r - \alpha r} \geq e^{c_1 r}$$

また  $\omega_r(\xi)$  と  $\tilde{\omega}_r(\xi)$  の関係は.

**補題 6.2**  $1 \leq \mu \leq r \leq n-1$  とし,  $\xi_0$  は  $\mathcal{L}_r$  に bind

されているとすると,

$$K^{-5} e^{-\epsilon \mu} \|\omega_\mu(\xi)\| \leq \|\tilde{\omega}_\mu(\xi)\| \leq K^6 e^{(\epsilon + \alpha)\mu} \|\omega_\mu(\xi)\|$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \|\tilde{\omega}_r(\xi)\| &\geq K^{-5} e^{(c_1 - \epsilon)r} \\ &\geq e^{c_2 r} \end{aligned} \quad (N \text{ は十分大}).$$

§6.1 で構成された  $\mathcal{L}_n$  に対し, 仮定 5, 6 が成立することを (BA) を仮定して, 証明し, その後, (BA) と (FA) により除かれ parameter  $\alpha$  の評価を行う。そして時間  $n+1$  に進む。すべての時間において, (BA) と (FA) が成り立つならば帰納法が完結する。

## References

- [B] G. Belitskii    Equivalence and normal forms of  
germs of smooth mappings,  
Russian Math. Surveys 33,1 (1978)  
107-177.
- [BC] M. Benedicks and L. Carleson, The dynamics of the  
Hénon map, Ann. Math.  
133 (1991), 73-169.
- [H] M. Hénon    A two dimensional mapping with  
a strange attractor, Comm. Math. Phy.  
50 (1976), 69-77
- [MV] L. Mora and M. Viana, Abundance of strange  
attractors, preprint.
- [P] R. Plykin, On the geometry of hyperbolic  
attractors of smooth cascades,  
Russian Math. Surveys  
39, 6 (1984), 85-131.